

Laurenz Göllmann · Reinhold Hübl
Susan Pulham · Stefan Ritter
Henning Schon · Karlheinz Schüffler
Ursula Voß · Georg Vossen

Mathematik für Ingenieure: Verstehen · Rechnen · Anwenden

Band 1: *Vorkurs, Analysis in einer
Variablen, Lineare Algebra, Statistik*

Mathematik für Ingenieure: Verstehen – Rechnen – Anwenden

Laurenz Göllmann · Reinhold Hübl · Susan Pulham ·
Stefan Ritter · Henning Schon · Karlheinz Schüffler ·
Ursula Voß · Georg Vossen

Mathematik für Ingenieure: Verstehen – Rechnen – Anwenden

Band 1: Vorkurs, Analysis in einer
Variablen, Lineare Algebra, Statistik

Laurenz Göllmann
Fachbereich Maschinenbau
FH Münster
Steinfurt, Deutschland

Reinhold Hübl
Informationstechnologie
Duale Hochschule Baden-Württemberg
Mannheim, Deutschland

Susan Pulham
Wirtschaftswissenschaften
Hochschule für Technik und Wirtschaft des Saarlandes
Saarbrücken, Deutschland

Stefan Ritter
Fakultät für Elektro- und Informationstechnik
Hochschule Karlsruhe
Karlsruhe, Deutschland

Henning Schon
Fakultät Maschinenbau/Werkstofftechnik
Hochschule Aalen
Aalen, Deutschland

Karlheinz Schöffler
Maschinenbau und Verfahrenstechnik
Hochschule Niederrhein
Krefeld, Deutschland

Ursula Voß
Fakultät Vermessung, Informatik und Mathematik
Hochschule für Technik
Stuttgart, Deutschland

Georg Vossen
Maschinenbau und Verfahrenstechnik
Hochschule Niederrhein
Krefeld, Deutschland

ISBN 978-3-662-53866-1
DOI 10.1007/978-3-662-53867-8

ISBN 978-3-662-53867-8 (eBook)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Vieweg

© Springer-Verlag GmbH Deutschland 2017

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutzgesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Planung: Dr. Andreas Rüdinger

Einbandabbildung: © Claudiad/Getty Images/iStock

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer Vieweg ist Teil von Springer Nature

Die eingetragene Gesellschaft ist Springer-Verlag GmbH Deutschland

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Vorwort

... auf den ersten Blick

Liebe Studierende,

dieses zweibändige Lehrbuch ist eine anwendungsorientierte Einführung in die Theorie, die Methoden und die praxisgerechte Nutzung der Mathematik in den Ingenieursstudiengängen der Hochschulen für angewandte Wissenschaften. Unser Buch folgt dem Grundsatz

So viel Theorie wie nötig – so viel Anwendungsbezug wie möglich

Wir orientieren uns dabei an demjenigen Stoffumfang, der an den Hochschulen für angewandte Wissenschaften in den technisch ausgerichteten Studiengängen in aller Regel vermittelt wird. Darüber hinaus stellen wir interessierten Lesern ein zusätzliches Hintergrundwissen zur Verfügung und zeigen, welche weiteren vielversprechenden Konzepte und Anwendungen sich ergeben können. Unser Buch enthält die Präsentation, vielfältige Anwendungsbezüge sowie die Verankerung der Lehrinhalte mittels Beispielen und Übungsaufgaben aus folgenden Themenbereichen:

- Analysis
- Lineare Algebra
- Differenzialgleichungen
- Optimierung und Statistik

Es setzt zwar die schulischen Grundlagen sowohl der Algebra einfacher Gleichungen und Ungleichungen als auch den vertrauten Umgang mit elementaren Funktionen voraus, enthält aber gleichwohl eine sehr ausführliche Zusammenstellung aller essenziellen mathematischen Vorkenntnisse in Form eines eigenen einführenden Kapitels.

Die stoffliche Breite schließt dabei neben dem Bachelor-Grundlagenbereich auch signifikante Lehr- und Anwendungsthemen des Masterbereichs ein.

Die Autoren sind Professorinnen und Professoren an Hochschulen für angewandte Wissenschaften.

... auf den zweiten Blick

Liebe Leser, Studierende und Lehrende,

wenn Sie dieses Buch über Mathematik in Händen halten, so haben Sie schon einen – vielleicht den wichtigsten – Schritt getan, Wissenschaft und Technik, Theorie und Praxis erobern und verstehen lernen zu wollen.

Verstehen lernen?

Wir erleben in der heutigen Zeit gewaltige expansive Entwicklungen – auf den Feldern der Technologien ebenso wie in beinahe allen Bereichen des Bildungswesens. Und folgerichtig fällt der Blick für das Ganze immer schwerer, und ebenso konsequenterweise erblüht eine schier unermessliche Landschaft spezialisierter Gattungen an Wissensgebieten mitsamt deren kaum noch überschaubaren Anwendungsverästelungen.

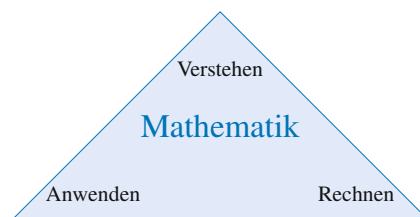
Wir sehen dies bereits bei einem kurzen Blick in die Curricula unserer Studienpläne: War beispielsweise das klassische Fach „Maschinenbau“ ehemals eine kreuzbrave Wissenschaft beinahe allerorts einheitlicher inhaltlicher Ausgestaltung, so zeigt der Fächerkatalog zusammen mit beruflich intendierten Zielen dieses Faches eine überbordende Fülle an Möglichkeiten, Angeboten, Studienformaten und vielem mehr – manchmal sogar bereits innerhalb einer einzigen Hochschule.

Und gäbe es um diesen Pluralismus nicht eine gemeinsame Klammer, so wären Lernende – wie aber sicher auch Lehrende – dieser scheinbaren Uferlosigkeit beinahe hilflos ausgeliefert. Gibt es denn eine solche Klammer?

Die Mathematik ist eine solche Klammer – aber nur dann, wenn sowohl ihre Inhalte wie auch ihre Methoden und demzufolge auch ihr Gebrauch hinreichend verstanden sind

Hierbei kommt es ganz entscheidend darauf an, was wir unter „Mathematik“ überhaupt verstehen – und bedauerlicherweise liegt gerade hierin das Problem: Traumatische Erlebnisse mit nie richtig verstandenen p - q -Formeln, defizitärer Umgang mit einfachsten Binömchen und eine unglaubliche Treue zu den bizarrsten Elementarfehlern – vornehmlich des einfachen Bruchrechnens – lassen Entdeckungen in die Schönheiten und in den Nutzen mathematischer Theorie in weite Ferne rücken.

So ist ein Spannungsdreieck



entstanden, dem alle Prozesse sowohl des Lernens als auch des Lehrens in äußerst sensibler Weise ausgesetzt sind. Und die folgenden drei Fragen beschreiben sehr prägnant das kausale Wechselspiel dieser drei Kompetenzen – wobei die affirmativen Antworten nicht nur nach unseren eigenen Erfahrungen offenkundig sind:

- Ist es nicht so, dass die Anwendung einer Formel oder eines Rechenverfahrens, denen ein Verstehen nie vorausgegangen ist, in nicht wenigen Fällen zu einem Resultat führt, welches mit der ursprünglichen Aufgabe rein gar nichts mehr zu tun hat?
- Und ist es nicht so, dass so manche sicher gut verstandene Formel zu keinem Nutzen fähig ist, wenn weder Routine im Kalkül noch ein Gefühl für zielführende Methoden erarbeitet wurden?
- Und ist es ferner nicht auch so, dass das oft eher als mühevoll angesehene Verstehenwollen eines mathematischen Kontextes erst durch die Vielfalt seiner Anwendungsmöglichkeiten belohnt wird – wie auch umgekehrt jene nur dann sich erschließen, wenn die Kraft der Abstraktion wirken kann?

In diesem Dreieck hängt in der Tat alles mit allem zusammen – und konsequenterweise hat unser Buch diese Überzeugung mit einfließen lassen! Daher begegnet man beweisenden Argumentationen ebenso wie vielfältigen Angeboten nützlicher mathematischer Anwendungen, aber auch zahlreichen Möglichkeiten des übenden Rechnens.

Und überhaupt stellen sich bei der Entstehung eines studienbegleitenden Buches erst einmal folgende grundsätzliche Fragen – und zwar sowohl für die Autoren als auch für die adressierten User, also für alle diejenigen, die sich mit den fachlichen Inhalten vertraut machen möchten respektive müssen und die folglich das Buch verwenden könnten:

1. Wozu ein Buch?
2. Wozu ein Buch über Mathematik?
3. Wozu gerade dieses Buch über Mathematik?

Die erste Frage, warum man überhaupt ein Buch – also einen fortlaufenden Text in gedruckter oder in elektronischer Form – verwenden soll, stellt sich dabei beinahe ausschließlich bedingt durch die Allgegenwärtigkeit des Internets. Das an allen Orten wie zu allen Zeiten omnipräsente Internet hat unsere Lesegewohnheiten und – vor allem (!) – die Art und Weise, wie wir Informationen suchen, verändert – ja: radikal verändert. Die dortige Verfügbarkeit von Informationen aller Art führt beispielsweise dazu, dass man diese in genau der Form haben möchte, die man glaubt, unmittelbar zu benötigen. Und in aller Regel bekommt man dies dann auch postwendend. Also warum dann doch ein Buch? Dazu gibt es glücklicherweise gleich mehrere Antworten, von denen wir die zwei signifikantesten nennen wollen:

- Weil das Buch ein Thema *didaktisch entwickeln* kann: Es führt den Lernenden über die Stufen
 - Motivation und Eröffnung des Problemfeldes,
 - begriffliche und faktische Darlegungen: die Theorie,
 - ganz bewusst gewählte Beispiele zu ganz bewusst ausgesuchten Anwendungen und
 - Anleitungen und Einübung zur selbstständigen Nutzung in der realen Anforderung zu den Zielen einer *nachhaltigen Kenntnis* des betrachteten Themenkomplexes und eines *sicheren Umgangs* mit seinen Lerninhalten in den relevanten Anwendungen.
- Weil das Buch ein Thema *geschlossen vorstellen* kann. So haben wir stets dafür Sorge getragen, unsere Beiträge dem subtil vernetzten System grundsätzlicher Fragen zu öffnen, wie etwa diesen:
 - Wo fängt man an?
 - Für wen ist das Buch gedacht?
 - Welche Verstehens- und Fertigungsvoraussetzungen sind gegeben?
 - Was sind die Ziele? Und wie gestaltet sich demnach die Stoffauswahl?
 - Welche Anwendungen, Beispiele, Aufgaben samt passender Lernkontrolle sind angestrebt?
 - Welche gestalterischen Darstellungen und welche Ansprachen sind zielführend?

Und genau dies ist nämlich ein charakteristisches Unterscheidungsmerkmal: Die Frage, wo ein Thema beginnt und bei welchem der abermillionenfach möglichen Links des Internets ein Wissen hierüber endet, gliche einem Lotteriespiel mit Halbwertszeiten des vorübergehenden Wissensbesitzes weit unterhalb einer klausurrelevanten Notwendigkeit – von ernsthaften Studienzielen weit entfernt.

Daher haben wir uns konsequenterweise intensiv mit den Fragen auseinandergesetzt, für wen das Buch gedacht ist, welche Voraussetzungen die Leser mitbringen und welche Ziele sie verfolgen. Auch die Stoffauswahl und die gestalterische Darstellung orientieren sich daran. Auch soll erwähnt werden, dass wir hier unter „Buch“ gleichzeitig seine klassische Form wie auch die mittlerweile übliche elektronische Form verstehen; letztere wird auch im vorliegenden Fall angeboten.

Der zweiten Frage begegnen wir gar nicht so selten. Wie häufig ist nämlich zu hören:

- Mathematik – das sind doch Formeln und endlose Zahlenkolonnen!
- Ist in der Mathematik nicht schon alles herausgefunden, sprich *erforscht*?

Und von *grauer Theorie* ist die Rede. Wäre das Erstere der Fall, dann wäre die Mathematik keine Wissenschaft; wäre das Letztere der Fall, ergäben sich letztendlich auch keine Anwendungen mehr zu den wachsenden Forschungsthemen aus Technik, Theorie und Praxis. Denn zu allen Zeiten waren jene der unablässig inspirierende Motor und permanente Ansporn zur Implantierung und Erforschung neuer Methoden, neuer Begriffe und neuer Zusammenhänge – kurz: neuer mathematischer Theorien. So wäre der mittlerweile riesige Bereich der numerischen Rechenverfahren (Numerik) ohne die inspirierenden Anforderungen aus den diversen Ingenieurwissenschaften kaum denkbar. Ein anderes Beispiel – aus den Tiefen scheinbar weit entrückter Mathematik – mag die Minimalflächentheorie sein. Ein Ausgangsproblem, entstanden aus kindlichen Spielen mit Seifenblasen:

Spanne in eine geschlossene Drahtschleufe eine Fläche ein, die diesen Draht als Rand hat und deren Flächeninhalt minimal gegenüber denjenigen aller anderen Flächen ist, welche diesen Draht ebenfalls zum Rand haben (Plateau-Problem)

fürte über eine Vielzahl grundsätzlicher Fragestellungen (gibt es überhaupt solche Lösungen, gibt es nur eine, gibt es viele – und wenn ja: wann und wie berechnet man sie, wie verhalten sie sich bei Störung der geometrischen Parameter . . .) simultan zu vielen neuartigen mathematischen Forschungszweigen, die ihrerseits über viele Jahrzehnte fruchtbare Ergebnisse vielfältigster Art erbrachten – dabei zunächst scheinbar nur innermathematisch. Mittlerweile sind diese Theorie und ihre Anwendungen jedoch in Statik, Bauphysik, ja sogar bei den Konstruktionselementen der Ingenieure bestens angekommen – Ende offen.

Und die Umkehrung dieses Zusammenhangs ist sicher nicht weniger bedeutsam:

Nur wer eine Theorie in ihren wichtigsten Ideen kennt, kann sie auch erfolgreich in der Praxis anwenden

Und diese Feststellung gilt sowohl für die möglicherweise entlegen erscheinende wissenschaftliche „Forschungsmathematik“ wie auch für eine in einer fachlichen Vielfalt wie der Ingenieurwissenschaft eingegliederten „Dienstleistungsmathematik“. Sicher finden wir ähnliche Zusammenhänge auch in anderen Kernbereichen der Ingenieurwissenschaften wie etwa Physik, Technische Mechanik und Elektrotechnik. Und je expansiver die Palette der Anwendungsformen ist, umso nötiger ist gerade hier die Kenntnis um das Gemeinsame und das Prinzipielle, aus denen dann der Reichtum der Methoden erst erkennbar wird.

Indem wir uns schließlich der *dritten Frage* zuwenden, kommen wir auch zu einer näheren Beschreibung des vorliegenden Projektes: Entstanden ist das Buch aus der Idee, möglichst dicht an *den (fach)hochschulischen Anforderungen* ein studienbegleitendes Lehrbuch anzubieten, welches die zentralen fachlichen Teildisziplinen der ersten Studiensemester unter den Aspekten

- einer technisch-anwendungsorientierten Ingenieurausbildung und
- einer sowohl leider uneinheitlichen als auch oft sehr lückenhaften Vorkenntnissituation der Studierenden in der Studieneingangsphase

zusammenbringt. Dazu hat sich ein Autorenteam gefunden, dessen Mitglieder an verschiedenen und teils sehr unterschiedlich orientierten Hochschulorten als Professorinnen und Professoren wirken und nun ihre in diversen FH-Ingenieurstudiengängen gewonnenen Lehrerfahrungen mit einbringen.

Unsere Beiträge sind zwar sorgfältig aufeinander abgestimmt – dennoch sind einige Überschneidungen durchaus möglich. Dies geschieht auch ganz bewusst, da in unterschiedlichen Zusammenhängen auch unterschiedliche Beschreibungen eines an sich festen Aspekts durchaus bereichernd wirken. Im Übrigen wollen wir nicht durch ein zu häufiges Verweisen zu entlegenen anderen Buchseiten den Lesefluss und dadurch auch den Verständnisfluss empfindsam stören.

Unser Buch huldigt – wie schon ganz zu Anfang besonders herausgestellt – dem Grundsatz

So viel Theorie wie nötig – so viel Anwendungsbezug wie möglich

Dabei geht es zweifellos über ein wie auch immer definiertes Minimalangebot hinaus, sodass interessierte Blicke „hinter die Kulissen“ ebenso befriedigt werden können wie diejenigen nach weiteren vielversprechenden Konzepten und Anwendungen. Gleichwohl sind – wie überall – Grenzen gezogen, und nicht jedes wünschenswerte Wissensgebiet konnte einbezogen werden: So ist etwa die gesamte Komplexe Funktionslehre – ein Meisterstück der Mathematik und eng verzahnt mit letztlich beinahe allen physikalischen Gleichungen und Prinzipien – leider nicht im Curriculum dieses Buches enthalten, sehen wir von dem gleichwohl sehr weitreichenden Kalkül mit komplexen Größen und Zahlen einmal ab. Und es ist auch nur ein schwacher Trost, dass man ihr in den fachhochschul-orientierten Bachelorstudiengängen auch nur äußerst selten begegnet.

Diesem Grundsatz folgend zeigt das Buch viele – sehr viele – Verbindungen zu Anwendungen auf, wie sie im späteren Studium oder sogar im Berufsalltag vorkommen können. Ein zweiter Grundsatz kommt hinzu

Mathematik lässt sich nur dann anwenden, wenn sie auch verstanden ist, und Mathematik kann besonders dann verstanden werden, wenn sie geübt wird

Aus diesem Grund findet der Leser Aufgaben am Ende jeden Kapitels. Wir ermuntern aufgrund intensiver, langjähriger Erfahrungen nachdrücklich dazu, sich gerne und beständig dem mitunter nicht mühelosen Test der Bearbeitung der gegebenen Probleme zu stellen. Selbstständige Bearbeitung der Aufgaben und üben, üben und nochmals üben: Genau dies ist die erfolgreiche Methode eines nachhaltigen Lernens. Das gilt insbesondere in den Phasen der Prüfungsvorbereitungen. Und was das Üben betrifft: Wer Pianist werden möchte, aber nie übt, bleibt ewig ein Dilettant – mozartsche Ausnahmen sind nicht so häufig ... Und ist nicht gerade auch der Sport das Paradebeispiel dieser Maxime?

Da, wo analytische Vorgehensweisen an ihre Grenzen stoßen, erklären wir die grundlegenden Ideen numerischer Verfahren und den Einsatz von MATLAB.

Schließlich hoffen wir, dass auch stilistische Elemente wie

- die Wahl kurzer Abschnitte, die sich klar einem Thema widmen und einen Kerngedanken behandeln und die auch bis zu einem gewissen Grad unabhängig gelesen werden können,
- der Einsatz farblich abgesetzter Beispiele, Anwendungsbeispiele sowie einiger Hintergründe, die es dem Leser ermöglichen, entweder nur das Procedere der Rechenvorgänge zu erlernen oder ganz nach Interesse oder Notwendigkeit auch deren Verankerungen zu studieren und
- ein ansprechendes farbiges Layout

zum erfolgreichen Studieren der Inhalte unseres Buches führen. Und genau diesen Erfolg wünschen wir all unseren Leserinnen und Lesern – wobei wir als Erfolg nicht nur das curriculare Reüssieren des Studiums meinen; vielmehr sehen wir dieses als Erfolg, wenn unser Buch dazu beiträgt, die Mathematik als substanziellen Bestandteil der Ingenieurwissenschaften beim Leser verankert zu wissen.

Als Ergebnis ist nun ein zweibändiges Lehrbuch zum Thema „Mathematik für Ingenieure“ entstanden, welches folgenden inhaltlichen Aufbau besitzt:

Inhalt Band 1

Teil I: Grundlagen (Stefan Ritter/Henning Schon/Ursula Voß)

Dieser Teil stellt die grundlegenden Werkzeuge und Begriffe zusammen, die in den nachfolgenden Kapiteln benötigt werden:

- Grundlegende Rechentechniken und das Lösen von Gleichungen
- Elementare Funktionen
- Komplexe Zahlen

Teil II: Analysis in einer Variablen (Laurenz Göllmann)

Dieser Teil widmet sich der Analysis der Funktionen einer reellen Variablen und enthält die zentrale Palette der klassischen Funktionslehre:

- Folgen und Reihen
- Konvergenz – Stetigkeit – Differenzierbarkeit
- Differenzialrechnung
- Integralrechnung

Teil III: Lineare Algebra (Reinhold Hübl)

In diesem Teil werden die wichtigsten Konzepte der linearen Algebra über einen geometrisch motivierten Zugang entwickelt und mit Blick auf eine anwendungsbezogene Nähe zur Mechanik und Physik vorgestellt. Behandelt werden folgende Themen:

- Vektorrechnung und analytische Geometrie
- Matrixkalkül mit Determinanten und lineare Gleichungssysteme
- Lineare Abbildungen und Eigenwerte

Teil IV: Statistik (Susan Pulham)

Dieser Teil entwickelt Themen der Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung aus praktischen Aufgabenstellungen heraus und bietet sich damit ganz besonders gut zum Eigenstudium an. Behandelt werden:

- Ein- und zweidimensionale deskriptive Statistik
- Wahrscheinlichkeitsrechnung
- Induktive Statistik, statistische Schätzverfahren und Hypothesentests

Aufgaben, Tabellen und eine Übersicht über die wichtigsten statistischen Verteilungen runden diesen Themenkomplex, der letztlich auch zu ökonomischen Zusammenhängen führt, ab.

Inhalt Band 2**Teil I: Analysis in mehreren Variablen** (Stefan Ritter/Henning Schon)

Dieser Teil widmet sich der Analysis von Funktionen von mehreren Variablen und behandelt folgende Themen:

- Differenzialrechnung für Funktionen von mehreren Variablen
- Integralrechnung für Funktionen von mehreren Variablen
- Kurven
- Flächen und Flächenintegral
- Integralsätze und Vektoranalysis

Somit enthält dieser Text eine nahezu komplette Darlegung der multidimensionalen Analysis, die einen zentralen Aspekt der anwendungsbezogenen Ingenieurmathematik darstellt und die mathematische Grundlage für wichtige Themen der Ingenieurwissenschaften wie Strömungslehre, Thermodynamik und Elektrodynamik bildet.

Teil II: Differenzialgleichungen (Ursula Voß)

Differenzialgleichungen treten in vielen praktischen Anwendungen auf, wo bei der Modellierung auch das Änderungsverhalten gesuchter Funktionen berücksichtigt werden muss. Behandelt werden in diesem Teil:

- Gewöhnliche Differenzialgleichungen
- Partielle Differenzialgleichungen

Ein eigenes Kapitel (entstanden in Zusammenarbeit mit L. Göllmann) widmet sich der Laplace-Transformation und ihrer Anwendung auf Differenzialgleichungen.

Während sich die gewöhnlichen Differenzialgleichungen recht umfassend darstellen lassen, können im Rahmen dieses Buches partielle Differenzialgleichungen nur einführend behandelt werden.

Teil III: Optimierung (Georg Vossen)

Mit diesem Teil liefert unser Buch einen deutlichen Beitrag zur *numerischen Mathematik* und führt uns gleichzeitig in Anwendungsbereiche, denen man auch in aufbauenden Masterstudiengängen begegnet:

- Was ist Optimierung?
- Lineare reelle und ganzzahlige Optimierung
- Nichtlineare Optimierung und Sensitivitätsanalysen
- Iterative numerische Verfahren

Mittels dieser Stationen führt dieser Teil in ein hochaktuelles Gebiet vielfältiger Anwendungen ein, wobei auch hier ähnlich zur Statistik ein bedeutender Bezug zu *ökonomischen Aspekten* erreicht wird.

Wir danken dem Springer-Verlag für die Herausgabe dieses Lehrbuches; besonderer Dank gilt hierbei Clemens Heine und Dr. Andreas Rüdinger sowie Bianca Alton (alle Springer) für ihre geduldige und ausgezeichnete Beratung und Begleitung zur Konzeption dieses Werkes. Unseren Lesern möchten wir für weitere Anregungen und Wünsche danken. Es freut uns, wenn unser Buch zum Erfolg beitragen sollte – es freut uns sogar noch mehr, wenn aus der Lektüre auch Freude an der Mathematik erwächst.

Im Juni 2017

Für das Autorenteam
Karlheinz Schüffler

Inhaltsverzeichnis

I Grundlagen

1	Mengen, Zahlen und Gleichungen – das Handwerkszeug der Mathematik . . .	3
1.1	Mengen	4
1.2	Aussagen, Gleichungen und Ungleichungen	5
1.3	Natürliche, ganze, rationale und reelle Zahlen	6
1.4	Rechnen mit reellen Zahlen	9
1.5	Potenzen, Wurzeln und Logarithmen	9
1.6	Indeschreibweise und Summenzeichen	13
1.7	Fakultät und Binomialkoeffizienten	15
1.8	Lösen von Gleichungen	18
1.9	Lösen von Ungleichungen	26
1.10	Reelle Punktmengen	30
	Aufgaben	32
2	Funktionen	35
2.1	Grundlegende Begriffe und Eigenschaften	36
2.2	Polynome und rationale Funktionen	45
2.3	Partialbruchzerlegung	52
2.4	Potenz- und Wurzelfunktionen	55
2.5	Exponential- und Logarithmusfunktionen	56
2.6	Trigonometrische Funktionen	60
2.7	Hyperbelfunktionen	64
2.8	Weitere Funktionen	66
	Aufgaben	68
3	Komplexe Zahlen	69
3.1	Grundbegriffe und die kartesische Form	70
3.2	Rechnen in kartesischer Darstellung	71
3.3	Die Polarform komplexer Zahlen	74
3.4	Die Exponentialform komplexer Zahlen	77
3.5	Schwingungen, Zeiger und komplexe Zahlen	80
3.6	Polynome und algebraische Gleichungen	82
	Aufgaben	86

II Analysis in einer Variablen

4	Folgen, Konvergenz und Reihen	91
4.1	Reelle Folgen	92
4.2	Konvergenz, Grenzwerte und Divergenz	94
4.3	Beschränktheit und Monotonie	96
4.4	Eigenschaften konvergenter Folgen	97
4.5	Differenzenfolgen	100
4.6	Reihen	102
4.7	Konvergenzkriterien für Reihen	103
4.8	Die Exponentialreihe	110
	Aufgaben	119
5	Funktionen, Grenzwerte und Stetigkeit	123
5.1	Funktionen einer reellen Variablen	124
5.2	Grenzwerte bei Funktionen und der Stetigkeitsbegriff	125
5.3	Beschränkte und monotone Funktionen	129
5.4	Natürlicher Logarithmus und allgemeine Exponentialfunktion	132
	Aufgaben	134
6	Differenzialrechnung einer Variablen	137
6.1	Differenzen- und Differenzialquotient	138
6.2	Grundregeln für die Differenziation	142
6.3	Ableitung der Exponential- und Logarithmusfunktion	146
6.4	Ableitung der trigonometrischen Grundfunktionen und ihrer lokalen Umkehrungen	148
6.5	Kurvenuntersuchung und Extremwerte	152
6.6	Grenzwertbestimmung	153
	Aufgaben	155
7	Integralrechnung einer Variablen	157
7.1	Das bestimmte Integral	158
7.2	Das unbestimmte Integral	161
7.3	Elementare Regeln zur Integration	164
7.4	Rotationskörper	169
7.5	Bogenlänge einer Kurve	171
7.6	Uneigentliche Integrale	171
	Aufgaben	173
8	Reihenentwicklungen	175
8.1	Potenzreihen	176
8.2	Taylor-Entwicklung	177
8.3	Fourier-Reihen	189
	Aufgaben	195

III	Lineare Algebra	
9	Vektorrechnung	199
9.1	Grundlagen der Vektorrechnung	200
9.2	Vektoroperationen	202
9.3	Ebene Vektoren	210
9.4	Vektoren im Raum	220
	Aufgaben	226
10	Analytische Geometrie	229
10.1	Das Skalarprodukt von Vektoren im Raum	230
10.2	Das Vektorprodukt	232
10.3	Geometrische Anwendungen der Vektorrechnung	238
	Aufgaben	250
11	Vektorräume und lineare Abbildungen	253
11.1	Der n -dimensionale reelle Raum	254
11.2	Euklidische Vektorräume	266
11.3	Allgemeine reelle oder komplexe Vektorräume	270
	Aufgaben	281
12	Matrizen und lineare Gleichungssysteme	283
12.1	Matrizen und Gleichungssysteme	284
12.2	Matrizenoperationen	296
12.3	Matrizen, lineare Abbildungen und lineare Gleichungssysteme	302
	Aufgaben	312
13	Determinanten und invertierbare Matrizen	315
13.1	Determinanten einer 2×2 - und einer 3×3 -Matrix	316
13.2	Die Determinante einer $n \times n$ -Matrix	325
13.3	Determinanten und invertierbare Matrizen	338
13.4	Orthogonale Matrizen und Isometrien	345
	Aufgaben	354
14	Eigenwerte und Normalformen	357
14.1	Eigenwerte und Eigenvektoren	358
14.2	Diagonalisierbarkeit	364
14.3	Normalformen	374
	Aufgaben	391

IV Statistik

15 Eindimensionale deskriptive Statistik – ein Merkmal aussagekräftig beschreiben 395

15.1 Was soll das eigentlich mit der Statistik? 396

15.2 Grundbegriffe 397

15.3 Grafische Darstellungen von Daten 399

15.4 Empirische Verteilungsfunktionen 401

15.5 Histogramme 404

15.6 Kenngrößen von Daten 405

Aufgaben 409

16 Zweidimensionale deskriptive Statistik – den Zusammenhang zwischen zwei Merkmalen beschreiben 411

16.1 Zusammenhagsuntersuchung bei nominalen Merkmalen 412

16.2 Zusammenhagsuntersuchung bei ordinalen Merkmalen 416

16.3 Zusammenhagsuntersuchung bei quantitativen Merkmalen 417

Aufgaben 420

17 Wahrscheinlichkeitsrechnung – fundiert Prognosen erstellen 423

17.1 Wahrscheinlichkeitsraum, Ereignisse, Wahrscheinlichkeiten 424

17.2 Bedingte Wahrscheinlichkeiten 428

17.3 Stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen 431

17.4 Zufallsvariablen 432

17.5 Verteilungen von Zufallsvariablen und ihre Kenngrößen 433

17.6 Stochastische Unabhängigkeit und Unkorreliertheit von Zufallsvariablen 443

17.7 Rechenregeln für Erwartungswert, Varianz und Kovarianz 445

17.8 Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung 446

Aufgaben 448

18 Induktive Statistik – Rückschlüsse von einer Stichprobe auf die Allgemeinheit ziehen 451

18.1 Statistische Schätzverfahren 452

18.2 Hypothesentests 459

Aufgaben 472

Anhang A: Tabellen 475

A.1 Binomialverteilung 475

A.2 Standardnormalverteilung 485

A.3 Quantile der t-Verteilung 486

A.4 Quantile der χ^2 -Verteilung 487

A.5 Quantile der F-Verteilung 488

Anhang B: Lösungen 489

Abbildungsnachweis 523

Sachverzeichnis 525